

$$\begin{pmatrix} i_1 \cdot (\frac{2}{1}e_2 + \frac{3}{1}e_3) & i_1 \cdot (\frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_3) & i_1 \cdot (\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2) \\ i_2 \cdot (\frac{2}{1}e_2 + \frac{3}{1}e_3) & i_2 \cdot (\frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_3) & i_2 \cdot (\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2) \\ i_3 \cdot (\frac{2}{1}e_2 + \frac{3}{1}e_3) & i_3 \cdot (\frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_3) & i_3 \cdot (\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{1} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

式 (10) 中各项计算方法与式 (5) 相似, 将式 (10) 与式 (1), 式 (2) 比较可得活动标架的角速度向量为

$$= -\frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}\dot{e}_2 - \frac{1}{2}e_3 \quad (11)$$

进一步可得角加速度向量为

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} = -\frac{2}{3}\dot{e}_1 + \frac{1}{3}\ddot{e}_2 - \frac{1}{2}\dot{e}_3 - \\ &\frac{2}{3}\dot{e}_1 + \frac{1}{3}\dot{e}_2 - \frac{1}{2}\dot{e}_3 = \\ &-\frac{2}{3}\dot{e}_1 + \frac{1}{3}\dot{e}_2 - \frac{1}{2}\dot{e}_3 \end{aligned} \quad (12)$$

由式 (11), 式 (12) 代入式 (3), 式 (4) 即得惯性力随曲面的第一、第二类基本量 E, G, F, L, M, N 以及动点 A 运动的广义速率 \dot{u}, \dot{v} 的变化速率.

作为例子, 下面讨论质点 A 约束在球面上的运动. 设球面方程为 $r = (R \cos \theta \cos \phi, R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta)$, 这里 $u = \theta, v = \phi$. 其第一、二类基本量及 \dot{u}, \dot{v} 为

$$\begin{aligned} E &= R^2 \cos^2 \theta, & F &= 0, & G &= R^2, & L &= -R \cos^2 \theta \\ M &= 0, & N &= -R \sin \theta, & \dot{u} &= -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{v} &= -\dot{\phi} \cos \theta, & \dot{v} &= -\dot{\phi} \cos \theta \end{aligned}$$

故角速度矩阵、角速度向量及角加速度向量为

$$\begin{aligned} \text{点 } Q^T \dot{Q} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & 0 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-\dot{\theta} \sin \theta) e_1 + (\cos \theta \dot{\phi}) e_2 + (\sin \theta \dot{\phi}) e_3 \\ &= (-\dot{\theta} \sin \theta) e_1 + (-\sin \theta \dot{\phi} + \cos \theta \dot{\phi}) e_2 + \\ &(\cos \theta \dot{\phi} + \sin \theta \dot{\phi}) e_3 \end{aligned}$$

由此可见, 当 $\dot{\theta}$ 为常数时, $\dot{\omega} = -\dot{\theta} \sin \theta e_1, \omega = -\dot{\theta} e_1$, 故活动标架绕 e_1 转动; 当 $\dot{\phi}$ 为常数时, $\dot{\omega} = (\cos \theta \dot{\phi} + \sin \theta \dot{\phi}) e_2 + (\cos \theta \dot{\phi} - \sin \theta \dot{\phi}) e_3$, 故活动标架绕 $(\cos \theta e_2 + \sin \theta e_3)$ 轴转动.

轮船在海面上行驶时, 若将其质心看作是动点 A , 船上有一个沿地球的纬线、经线及法线 3 个方向的标架, 则物体相对这个标架的运动, 应当考虑到上述惯性力的作用.

参 考 文 献

- 1 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学 (上、下册). 北京: 北京大学出版社, 1982
- 2 梅向明, 黄敬之. 微分几何 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 1988

鼓槌与打击中心

冯 鹏

(清华大学土木工程系结 51 班, 北京 100084)

摘要 用理论力学知识分析鼓槌击鼓的过程. 对鼓槌的不同形状和质量分布进行讨论, 得出了鼓槌的最佳握点.

关键词 端点, 动量, 角动量

在打击乐器中, 鼓是一个大家族. 古今中外, 形形色色的鼓有很多, 用来敲鼓的鼓槌也是形状各异

(图 1). 面对这形状各异的鼓槌, 自然会冒出一个问题: 究竟哪一种好呢? 下面我们从力学的角度来分析这几种鼓槌的利弊.

首先, 我们来看一看用鼓槌敲鼓的过程. 一个人手握鼓槌一端, 转动手腕, 挥动鼓槌. 这样鼓槌获得一定的角动量和动量. 接着鼓槌的另一端撞击到鼓皮, 发生碰撞, 就发出了“咚咚”的响声. 如果假设在打鼓

1997 - 07 - 14 收到第 1 稿, 1997 - 12 - 23 收到修改稿.

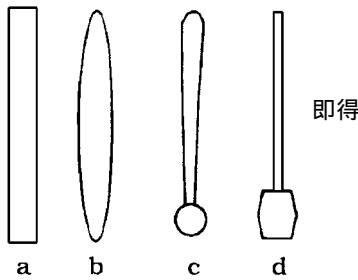


图1 形状各异的鼓槌

过程中人的小臂没有大幅度的挥动，并且敲击点在鼓槌的端部，就可以得到下面的这个力学模型（图2）：一个绕固定轴 O 转动的刚体 B_0 ，在力矩 M 的作用下加速，以角速度 ω 与平面 A 发生碰撞。 B_0 为鼓槌， O 为手握点， M 是人手对鼓槌加的外力矩， A 就是鼓面。

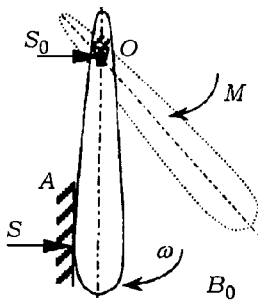


图2 鼓槌击鼓的力学模型

在碰撞发生的瞬时， B_0 的端部受到冲量 S ，在 O 处也有一个很大的反作用冲量 S_0 。也就是说，鼓槌会对人手有一个很大的反作用冲击，人就会感到痛。而且 S 越大， S_0 也越大，人手就会越痛。所以我们关心的问题是在上面几种鼓槌在获得同样的敲击效果时，即 S 相等时，哪一种对手的反作用冲量 S_0 最小。

理论上，无论哪一种鼓槌，只要握在打击中心处，就有反作用冲量 $S_0 = 0$ 。但我们不妨先来看一看图1中的鼓槌 a 的两种情况（图3）。鼓槌 a 是一根匀质杆，长为 l ，质量为 m ，初始处于静止。 O_1 为 a 的打击中心（即距杆端 $l/3$ 处）， O_2 为 a 的一个端点。情况1是手握鼓槌 a 的打击中心，情况2则是手握鼓槌的一端。在这两种情况下用力转动鼓槌，使其在与鼓面撞击前分别获得 ω_1 和 ω_2 的角速度。若要获得同样的敲击效果，鼓面对 a 的冲量则均为 S 。这里为分析方便，设敲击后 a 的角速度为 0。由于敲击作用时间很短， S 、 S_0 相对很大，可忽略重力等外力的作用。分

别对 O_1 和 O_2 用动量矩定理有

$$\begin{cases} J_{11} = S \cdot \frac{2}{3} l \\ J_{22} = S \cdot l \end{cases}$$

这部分动能是对手对鼓槌做功得到的，也就是人击鼓一次所需做的功。可以看出，情况2的效率高于情况1：在获得同样的击鼓效果时，我们握在鼓槌的端点要比握在打击中心少做功。演奏一首激烈的乐曲后，前者也许已是大汗淋漓，而后者或许只是喘几口大气而已。正如我们经验所得：在敲鼓时，从省力的角度来说，手应握在鼓槌的端点击鼓。

上面我们从省力的角度，得到一个击鼓的最佳握点。但前面的问题还没有解决，敲击时的 S_0 会弄痛我们的手。那么能不能把端点和打击中心合二为一，或者找到一个既省力，手受的冲击又小的最佳点呢？实际上这是从力学角度评判鼓槌好坏的标准。可以看出，这与鼓槌本身的形状和质量分布有关，下面就通过分析鼓槌的形状和质量分布，综合考虑既省力又有较小 S_0 的最佳握点。

我们仍把鼓槌看作平面上绕定轴转动质量分布均匀的刚体。并且假设获得同样的打击效果时，敲击的反作用冲量均为 S ，作用方向垂直于手握点 A 与质心 C 的连线。同样认为，敲击后的角速度为 0，且不考虑

其它外力的作用 (图 4). 手握点为 A , 到敲击点 K 的距离为 h , 质心 C 到 A 的距离为 c , 对质心的回转半径为 I , 质量为 M , 撞击前的角速度为 ω . 如 $S_0 = 0$, 即 A 为打击中心, 则有 $hc = I^2 + c^2$, 或 $c = I^2 / (h - c)$.

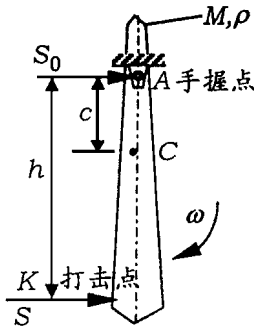


图 4 形状与打击中心的关系

可以看出, 若 $(h - c)$ 为常数, 则 I 越大, c 也就越大, 打击中心就越接近端点, 鼓槌形状就越合理: 击鼓省力而且对手的冲击小. 若鼓槌均匀对称, 如 a、b 两种鼓槌的情况, 则 $(h - c)$ 等于全长的一半. 由 $c = I^2 / (h - c)$ 可知质量分布越远离质心, 即 I 越大, 形状越合理. 图 5 中几种形状的鼓槌从左到右, 就是随 I 的增大而逐渐合理. 用越合理的鼓槌击鼓, 就可以在省力的同时使手受到的反作用越小, 或使得手受到的反作用为 0 的同时越省力.

如果我们换一个角度, 从质量分布考虑, 研究图 1 中 c、d 两种鼓槌的情况. 假设鼓槌 L 由两部分组成 (图 6), 刚性杆长 l , 质量为 m , 刚性球质量为 M , 半径很小可忽略. 同样对 O 用动量矩定理有

$$\frac{1}{3} ml^2 + Ml^2 = Sl$$

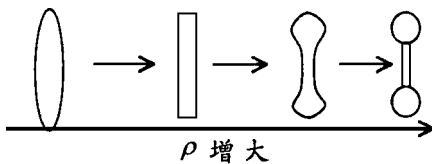


图 5 逐渐合理的鼓槌形状

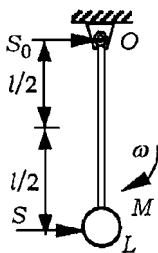


图 6 鼓槌质量分布与打击中心的关系

由动量定理得

$$m \frac{l}{2} + M l = S + S_0$$

则有 $S_0/S = m / (2m + 6M)$. 显然 S 不变时, S_0 的大小与 L 的质量分布有关, 即与 M/m 有关. 若令 $S_0/S = P$, $M/m = D$, 则可以得到下面的关系

$$P = \frac{1}{2 + 6D}$$

关系曲线如图 7. 可以看出鼓槌的质量越集中于一端越合理.

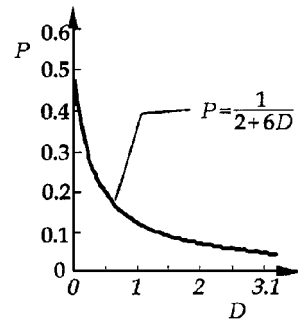


图 7 $P - D$ 关系曲线

庆典中常用的中国大鼓的鼓槌 (图 1 中的 d) $D = 2$, 则 $P = 1/14 = 7.1\%$, 手握它的尾端敲鼓时, 受到的反冲量还不到击鼓冲量的十分之一. 难怪鼓手能将鼓敲得震耳欲聋.

从前面的分析上来看, 显然图 1 中的 a 比 b 更合理, d 比 c 更合理些. 实际上当 $h - c = I^2/c$ 或 $M/m \rightarrow \infty$ 时, 我们握的点正是打击中心, 也是最佳握点. 这样就实现了打击中心与端点的最佳组合.

在实际中, 各种各样的鼓对鼓槌的要求是不同的. 庆典中常用的中国大鼓, 在敲击时为敲得更响, 需要考虑鼓槌的最佳握点, 达到省力和受到冲击小的效果; 而乐队中的小军鼓, 则多从音色上考虑, 加上敲击时无需很大的力, 所以也就无需考虑最佳握点了.

在工程中、生活中、体育运动中类似鼓槌的最佳握点 (最佳固定点) 的问题随处可见, 应用很广泛. 如棒球的球棒就考虑了最佳握点, 形状很特殊; 锤子敲打钉子, 锤子的头越重就越好用. 人们也许没有从力学上进行分析过, 但是在实践中早已找到了最佳握点.

我们在分析过程中只用了很简单的力学知识, 但却解释了一个很常见的问题. 所以只要在平时生活中多观察、多思考, 一定会有收获的.